Tentamen Metrische Ruimten, 2002

18 juni 2002 14:00-17:00

Graag naam op ieder vel. Verklaar je antwoorden; alleen "ja" of "nee" volstaat niet. Het gebruik van programmeerbare rekenmachines is niet toegestaan.

Opgave 1: Neem $\ell^1 = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum_i |x_i| < \infty\}$ met norm $\|x\| = \sum_i |x_i|$.
a) Onderzoek of ℓ^1 een inproduct ruimte is.
b) Onderzoek of ℓ^1 een Banach ruimte en/of Hilbert ruimte is.
c) Onderzoek of $A = \{x \in \ell^1 \,|\forall i \geq 1 \; x_i \neq 1/i^2\}$ open en/of gesloten is in $(\ell^1, \| \, \|_1)$.

Opgave 2: Toon aan of weerleg van de volgende begrippen (gedefiniëerd op een metrische ruimte V) of ze continu invariant zijn:
a) (x_n) is een Cauchy rij.
b) A is samenhangend.
c) Het inwendige $A^\circ = \emptyset$.

Opgave 3: a) Bewijs de volgende uitspraak of geef een tegenvoorbeeld: Een compacte verzameling bevat eindig veel geïsoleerde punten. (Voor de goede orde: 0 is ook eindig.)
b) Bepaal van de volgende functies of ze uniform continu zijn:
(i) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x \log x}{1+x^2}$ voor $x > 0$ en $f(0) = 0$.
(ii) $f : V \to \mathbb{R}$ voor een metrische ruimte (V, ρ); $f(x) = \rho(x, a)$ voor een vaste $a \in V$.
c) Bewijs: Een continue functie $f : A \to \mathbb{R}$ op een compacte metrische ruimte (A, ρ) is begrensd.

Opgave 4: a) Formuleer de Stelling van Weierstrass voor continue functies $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
b) Neem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin x$. Is er een rij polynomen $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat $\lim_{n\to\infty} \|p_n - f\| = 0$ in de sup-norm $\| \, \|$?
Neem $C^1([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ is continu differentieerbaar}\}$ met metriek $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x) - g'(x)|$.
c) Neem een begrensde rij $(f_n) \subset C^1([0,1])$ zodat $f_n' \to g$ uniform. Laat zien dat er een deelrij (n_i) bestaat en een $f \in C^1([0,1])$ zodat $f_{n_i} \to f$ uniform. (Zo nodig mag je stellingen uit het dictaat noemen zonder bewijs.)
d) Toon aan dat de verzameling polynomen op $[0,1]$ dicht ligt in $(C^1([0,1]), d)$.